



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

Math 3000.5



SCIENCE CENTER LIBRARY

MÉTHODE GÉNÉRALE
D'INTÉGRATION,

PAR EG. HANEGRAEFF.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1856

3000.5
Math ~~3158.56~~

Apr 18 1885
Thomas G. Smith.

AVERTISSEMENT.

Dans son ouvrage sur la *Réforme des Mathématiques*, M. Wronski présente, sous le nom de *Méthode primordiale et universelle*, des considérations analytiques fort remarquables; mais exposées d'une façon obscure et incomplète, elles sont à peu près inintelligibles pour ceux qui n'ont point approfondi ses ouvrages antérieurs.

Bornant l'application de nos formules au cas particulier de l'intégration des fonctions de x , nous avons essayé de présenter cette méthode à notre manière. Nous croyons en avoir abrégé les formules et simplifié la notation. Enfin nous avons trouvé, par une voie simple et facile, l'origine des fonctions fondamentales P , que M. Wronski s'est contenté de poser sans en donner la déduction.

Nous ne pouvons indiquer ici les principes généraux sur lesquels cette méthode nous semble devoir reposer, et qui ne sont pas ceux de M. Wronski. Nous nous proposons de les exposer dans un ouvrage sur la philosophie des mathématiques, que nous comptons publier prochainement.

MÉTHODE GÉNÉRALE D'INTÉGRATION.



Soit

$$F'x$$

une différentielle donnée.

La fonction primitive

$$Fx$$

peut être supposée égale au produit d'un nombre déterminé de facteurs, et cela avec une approximation d'autant plus grande, que le nombre de facteurs lui-même sera plus grand.

Admettons donc que, pour une valeur particulière de la fonction, nous ayons

$$(1) \quad Fa = y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{\sigma}$$

et supposons que a augmente de $(x - a)$, il viendra

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} Fx &= [y_1 - (x - a)] [y_2 - (x - a)] [y_3 - (x - a)] \dots [y_{\sigma} - (x - a)] \\ &= A_{\sigma} - (x - a) A_{\sigma-1} + (x - a)^2 A_{\sigma-2} - (x - a)^3 A_{\sigma-3} \dots \\ &\quad (-1)^{\sigma} (x - a)^{\sigma} A_0, \end{aligned} \right.$$

A_0 étant toujours égal à l'unité. Ou bien encore, en vertu de l'équation (1),

$$(3) \quad Fx = Fa \left[1 - (x - a) \frac{A_{\sigma-1}}{A_{\sigma}} + (x - a)^2 \frac{A_{\sigma-2}}{A_{\sigma}} - \dots (-1)^{\sigma} (x - a)^{\sigma} \frac{A_0}{A_{\sigma}} \right].$$

Mais

$$Fa,$$

(6)

développé par rapport à $(x - a)$, donne

$$(4) \quad Fa = Fx - F^{(1)}x(x - a) + F^{(2)}x(x - a)^2 - F^{(3)}x(x - a)^3 + \dots$$

Remplaçant cette valeur de Fa dans l'équation (3), nous obtiendrons

$$(5) \quad Fx = \left[1 - (x - a) \frac{A_{\sigma-1}}{A_{\sigma}} + (x - a)^2 \frac{A_{\sigma-2}}{A_{\sigma}} \right. \\ \left. - (x - a)^3 \frac{A_{\sigma-3}}{A_{\sigma}} \dots (-1)^{\sigma} (x - a)^{\sigma} \frac{A_0}{A_{\sigma}} \right] \\ \times [Fx - (x - a)F^{(1)}x + (x - a)^2 F^{(2)}x - (x - a)^3 F^{(3)}x + \dots;$$

effectuant la multiplication,

$$Fx = Fx - [A_{\sigma} F^{(1)}x + A_{\sigma-1} Fx] \frac{x - a}{A_{\sigma}} \\ + [A_{\sigma} F^{(2)}x + A_{\sigma-1} F^{(1)}x + A_{\sigma-2} Fx] \frac{(x - a)^2}{A_{\sigma}} \\ - [A_{\sigma} F^{(3)}x + A_{\sigma-1} F^{(2)}x + A_{\sigma-2} F^{(1)}x + A_{\sigma-3} Fx] \frac{(x - a)^3}{A_{\sigma}} \\ \dots \dots \dots (-1)^{\sigma} [A_{\sigma} F^{(\sigma)}x + A_{\sigma-1} F^{(\sigma-1)}x + A_{\sigma-2} F^{(\sigma-2)}x \dots + A_0 Fx] \frac{(x - a)^{\sigma}}{A_{\sigma}} \\ (-1)^{\sigma+1} [A_{\sigma} F^{(\sigma+1)}x + A_{\sigma-1} F^{(\sigma)}x + A_{\sigma-2} F^{(\sigma-1)}x \dots + A_0 F^{(1)}x] \frac{(x - a)^{\sigma+1}}{A_{\sigma}} \\ (-1)^{\sigma+2} [A_{\sigma} F^{(\sigma+2)}x + A_{\sigma-1} F^{(\sigma+1)}x + A_{\sigma-2} F^{(\sigma)}x \dots + A_0 F^{(2)}x] \frac{(x - a)^{\sigma+2}}{A_{\sigma}} \\ \dots \dots \dots$$

d'où nous tirons les équations

$$(6) \quad \begin{cases} A_{\sigma} F^{(\sigma+1)}x + A_{\sigma-1} F^{(\sigma)}x + A_{\sigma-2} F^{(\sigma-1)}x + \dots A_0 F^{(1)}x = 0, \\ A_{\sigma} F^{(\sigma+2)}x + A_{\sigma-1} F^{(\sigma+1)}x + A_{\sigma-2} F^{(\sigma)}x + \dots A_0 F^{(2)}x = 0, \\ A_{\sigma} F^{(\sigma+3)}x + A_{\sigma-1} F^{(\sigma+2)}x + A_{\sigma-2} F^{(\sigma+1)}x + \dots A_0 F^{(3)}x = 0, \\ \dots \dots \dots \\ A_{\sigma} F^{(2\sigma)}x + A_{\sigma-1} F^{(2\sigma-1)}x + A_{\sigma-2} F^{(2\sigma-2)}x + \dots A_0 F_{\sigma} = 0, \end{cases}$$

qui serviront à déterminer les σ coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{\sigma}$ en fonctions des différentielles connues $F^{(1)}x, F^{(2)}x, F^{(3)}x, \dots, F^{(2\sigma)}x$.

(7)

Ainsi, pour

$$\varpi = 1,$$

nous aurons

$$(7) \quad A_1 F^{(2)} x + F^{(1)} x = 0;$$

d'où

$$(8) \quad A_1 = - \frac{F^{(1)} x}{F^{(2)} x}.$$

Pour

$$\varpi = 2,$$

nous pourrions prendre les deux équations

$$A_2 F^{(3)} x + A_1 F^{(2)} x + F^{(1)} x = 0,$$

$$A_2 F^{(4)} x + A_1 F^{(3)} x + F^{(2)} x = 0;$$

mais il est mieux d'éliminer par différentiation.

Ainsi la première de ces deux équations

$$(9) \quad A_2 F^{(3)} x + A_1 F^{(2)} x + F^{(1)} x = 0$$

divisée par $F^{(2)} x$ et différentiée, en ayant soin de diviser chaque différentielle par son nouvel indice, de sorte que

$$F^{(\mu)} x = \frac{d^\mu F x}{1.2 \dots \mu dx^\mu}$$

différentié donnerait

$$F^{(\mu+1)} x = \frac{d^{\mu+1} F x}{1.2 \dots (\mu+1) dx^{\mu+1}};$$

nous aurons

$$A_1 \left(\frac{F^{(2)} x}{F^{(2)} x} \right)' + \left(\frac{F^{(1)} x}{F^{(2)} x} \right)' = 0,$$

c'est-à-dire,

$$A_1 \frac{[(F^{(2)} x)^2 - F^{(2)} x F^{(1)} x]}{(F^{(2)} x)^2} + \frac{F^{(2)} x F^{(2)} x - F^{(1)} x F^{(1)} x}{(F^{(2)} x)^2} = 0.$$

d'où

$$(10) \quad A_1 = - \frac{F^{(3)}x F^{(2)}x - F^{(1)}x F^{(4)}x}{[F^{(3)}x]^2 - F^{(2)}x F^{(4)}x}.$$

On calculerait cette valeur de A_1 , et l'ayant substituée dans (9), nous en tirerions la valeur de A_2 .

De même, pour

$$\varpi = 3,$$

nous prendrions l'équation

$$(11) \quad A_3 F^{(4)}x + A_2 F^{(3)}x + A_1 F^{(2)}x + F^{(1)}x = 0;$$

divisant d'abord par $F^{(4)}x$, et différenciant de la manière convenue, il viendra

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2 [(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x F^{(5)}x] + A_1 [F^{(4)}x F^{(3)}x - F^{(2)}x F^{(6)}x] \\ + [F^{(4)}x F^{(2)}x - F^{(1)}x F^{(5)}x] = 0; \end{array} \right.$$

divisant de nouveau par

$$(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x F^{(5)}x$$

et différenciant, nous obtiendrons

$$(13) \quad A_1 = - \frac{[(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x F^{(5)}x][F^{(4)}x F^{(3)}x - F^{(1)}x F^{(6)}x] - [F^{(4)}x F^{(2)}x - F^{(1)}x F^{(5)}x][F^{(4)}x F^{(5)}x - F^{(3)}x F^{(6)}x]}{[(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x F^{(5)}x][F^{(4)}x F^{(3)}x - F^{(1)}x F^{(6)}x] - [F^{(4)}x F^{(2)}x - F^{(1)}x F^{(5)}x][F^{(4)}x F^{(5)}x - F^{(3)}x F^{(6)}x]}.$$

Calculons cette valeur de A_1 et portons-la dans l'équation (12), nous en tirerons la valeur de A_2 ; substituant ensuite A_1 et A_2 dans (11), nous aurons A_3 .

On procéderait de la même manière pour obtenir les coefficients, en prenant

$$\varpi = 4, \quad \varpi = 5, \dots$$

Supposons donc que les coefficients de l'équation (3) soient remplacés par leurs valeurs en fonction des différentielles de la fonction que l'on cherche, on aura

$$F x = F a \left[1 - (x - a) \frac{A_{\varpi-1}}{A_{\varpi}} + (x - a)^2 \frac{A_{\varpi-2}}{A_{\varpi}} - \dots (-1)^{\varpi} (x - a)^{\varpi} \cdot \frac{A_0}{A_{\varpi}} \right],$$

ou bien, en exprimant le facteur polynôme par $f(x, a)$,

$$(14) \quad F x = F a \times f(x, a).$$

(9)

Or, pour que cette équation ait lieu dans toute l'étendue des valeurs dont x est susceptible, nous diviserons l'équation (14) par $(x - a)$, et prenant la différentielle $\varpi^{i\text{ème}}$ par rapport à a , nous aurons

$$d^{\varpi} \left(\frac{Fx}{x-a} \right) \frac{1}{da^{\varpi}} = d^{\varpi} \left(Fa \times \frac{f(x,a)}{x-a} \right) \cdot \frac{1}{da^{\varpi}},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{1.2.3\dots\varpi.Fx}{(x-a)^{\varpi+1}} &= Fa.d^{\varpi} \left(\frac{f(x,a)}{x-a} \right) \frac{1}{da^{\varpi}} + \varpi.F'a d^{\varpi-1} \left(\frac{f(x,a)}{x-a} \right) \frac{1}{da^{\varpi-1}} \\ &+ \frac{\varpi(\varpi-1)}{1.2} F''a.d^{\varpi-2} \left(\frac{f(x,a)}{x-a} \right) \frac{1}{da^{\varpi-2}} \dots\dots \\ &+ F^{\varpi}a \left(\frac{f(x,a)}{x-a} \right), \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$(15) \quad Fx = Fa + F^{(1)}a P_{(1)}(x-a) + F^{(2)}a P_{(2)}(x-a)^2 + F^{(3)}a P_{(3)}(x-a)^3 \dots + F^{(\varpi)}a P_{(\varpi)}(x-a)^{\varpi},$$

en posant, pour abréger,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{(1)} &= 1 - (x-a)^{\varpi} \frac{A_0}{A_{\varpi}}, \\ P_{(2)} &= 1 - (x-a)^{\varpi-1} \frac{A_1}{A_{\varpi}} + \frac{\varpi-1}{1} (x-a)^{\varpi} \frac{A_0}{A_{\varpi}}, \\ P_{(3)} &= 1 - (x-a)^{\varpi-2} \frac{A_2}{A_{\varpi}} + \frac{\varpi-2}{1} (x-a)^{\varpi-1} \frac{A_1}{A_{\varpi}} \\ &\quad - \frac{(\varpi-2)^{11}}{1^2 1^1} (x-a)^{\varpi} \frac{A_0}{A_{\varpi}}, \\ P_{(4)} &= 1 - (x-a)^{\varpi-3} \frac{A_3}{A_{\varpi}} + \frac{\varpi-3}{1} (x-a)^{\varpi-2} \frac{A_2}{A_{\varpi}} \\ &\quad - \frac{(\varpi-3)^{111}}{1^2 1^1} (x-a)^{\varpi-1} \frac{A_1}{A_{\varpi}} + \frac{(\varpi-3)^{111}}{1^3 1^1} (x-a)^{\varpi} \frac{A_0}{A_{\varpi}}, \\ &\dots\dots\dots \\ P_{(\varpi)} &= 1 - (x-a)^{\frac{A_{\varpi}-1}{A_{\varpi}}} + (x-a)^2 \frac{A_{\varpi-2}}{A_{\varpi}} \\ &\quad - \dots (-1)^{\varpi} (x-a)^{\varpi} \frac{A_0}{A_{\varpi}}. \end{aligned} \right.$$

Faisons de plus dans la formule (15)

$$\Sigma_{(\varpi)} = F^{(1)}a P_{(1)}(x-a) + F^{(2)}a P_{(2)}(x-a)^2 + F^{(3)}a P_{(3)}(x-a)^3 \dots \\ + F^{(\varpi)}a P_{(\varpi)}(x-a)^\varpi,$$

il viendra

$$(17) \quad Fx = Fa + \Sigma_{(\varpi)},$$

et nous aurons ainsi Fx avec une approximation aussi grande que l'on voudra, et même d'une manière rigoureusement exacte pour $\varpi = \infty$.

Cependant, comme le calcul des fonctions $P_{(1)}, P_{(2)}, \dots, P_{(\varpi)}$ devient de plus en plus laborieux à mesure que le nombre ϖ des éléments y_1, y_2, y_3, \dots , augmente, on pourra toujours s'arrêter à tel nombre que l'on voudra, pourvu qu'on ajoute alors au second membre de l'équation (17) une série complémentaire. Or cette série offre cette particularité, qu'elle procède suivant les puissances ascendantes d'une fonction entièrement arbitraire, pourvu seulement qu'elle satisfasse à la condition de s'annuler pour $x = a$.

Soit donc

$$\varphi x$$

cette fonction arbitraire, et

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} S_{\varpi+1} = N_{\varpi+1}(\varphi x)^{\varpi+1} + N_{\varpi+2}(\varphi x)^{\varpi+2} + N_{\varpi+3}(\varphi x)^{\varpi+3} \dots \\ + N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu} + N_{\varpi+\mu+1}(\varphi x)^{\varpi+\mu+1} + \dots \end{aligned} \right.$$

la série complémentaire; nous aurons

$$(19) \quad Fx = Fa + \Sigma_{(\varpi)} + S_{(\varpi+1)},$$

et il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient général de cette série

$$N_{\varpi+\mu}.$$

Or, en faisant passer tous les termes qui précèdent celui qu'affecte ce coefficient dans le premier membre (19), et divisant le tout par

$$(\varphi x)^{\varpi+\mu},$$

nous aurons

$$\frac{Fx - [Fa + \Sigma_{(\varpi)}] - [S_{\varpi+1} - (N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu} + \dots)]}{(\varphi x)^{\varpi+\mu}} = N_{\varpi+\mu} + N_{\varpi+\mu+1}(\varphi x) + \dots$$

Mais pour $x = a$, il vient

$$N_{\varpi+\mu} = \frac{0}{0},$$

et levant l'indétermination

$$(20) \left\{ \frac{d^{\varpi+\mu} \{ Fx - [Fa + \Sigma(\varpi)] - [S_{\varpi+1} - (N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu} + \dots)] \}}{d^{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu} \cdot \frac{1}{dx^{\varpi+\mu}}} \right\} \frac{1}{dx^{\varpi+\mu}} = N_{\varpi+\mu}.$$

(x = a)

Il est facile de voir que

$$(21) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^{\varpi+\mu} [Fa + \Sigma(\varpi)]}{dx^{\varpi+\mu}} \\ &= (\varpi + \mu) F^{(1)} a \frac{d^{\varpi+\mu-1} P_{(1)}}{dx^{\varpi+\mu-1}} + (\varpi + \mu - 1)^2 F^{(2)} a \frac{d^{\varpi+\mu-2} P_{(2)}}{dx^{\varpi+\mu-2}} \\ &+ (\varpi + \mu - 2)^3 F^{(3)} a \frac{d^{\varpi+\mu-3} P_{(3)}}{dx^{\varpi+\mu-3}} + (\varpi + \mu - 3)^4 F^{(4)} a \frac{d^{\varpi+\mu-4} P_{(4)}}{dx^{\varpi+\mu-4}} \\ &\dots + (\mu)^{\varpi+1} F^{(\varpi)} a \frac{d^{\mu-1} P_{(\varpi)}}{dx^{\mu-1}} \end{aligned} \right\} x = a.$$

Mais les différentielles de $P_{(1)}, P_{(2)}, P_{(3)}, \dots, P_{(\varpi)}$ (16), en posant, pour abrégé,

$$\frac{d^{\mu-\rho-1}}{1^{\mu-\rho-1}} \left(\frac{A_{\nu}}{A_{\varpi}} \right) \cdot \frac{1}{dx^{\mu-\rho-1}} = (A_{\nu, \varpi})^{(\mu-\rho-1)}$$

(x = a),

sont :

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^{\varpi+\mu-1} P_{(1)}}{dx^{\varpi+\mu-1}} = -1^{\varpi+\mu-1} (A_{0, \varpi})^{(\mu-1)} \\ & \quad x = a, \\ & \frac{d^{\varpi+\mu-2} P_{(2)}}{dx^{\varpi+\mu-2}} = -1^{\varpi+\mu-2} \left\{ (A_{1, \varpi})^{(\mu-1)} - (\varpi-1) (A_{0, \varpi})^{(\mu-2)} \right\} \\ & \quad x = a, \\ & \frac{d^{\varpi+\mu-3} P_{(3)}}{dx^{\varpi+\mu-3}} = -1^{\varpi+\mu-3} \left\{ (A_{2, \varpi})^{(\mu-1)} - (\varpi-2) (A_{1, \varpi})^{(\mu-2)} \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + \frac{(\varpi-2)^2}{1^2} (A_{0, \varpi})^{(\mu-3)} \right\} \\ & \quad x = a, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{d^{\mu-1} P_{(\varpi)}}{dx^{\mu-1}} = -1^{\mu-1} \left\{ \begin{aligned} & (A_{\varpi-1, \varpi})^{(\mu-1)} - (A_{\varpi-2, \varpi})^{(\mu-2)} \\ & + (A_{\varpi-3, \varpi})^{(\mu-3)} - \dots \dots \dots \\ & (-1)^{\varpi-1} (A_{0, \varpi})^{(\mu-\varpi)} \end{aligned} \right\} \\ & \quad x = a, \end{aligned} \right.$$

Or, si nous substituons ces valeurs dans l'équation (21), il viendra

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\sigma+\mu} [Fa + \Sigma(\sigma)]}{dx^{\sigma+\mu}} = -1^{\sigma+\mu+1} \times A_{(\sigma)}^{(\mu)}, \\ x = a, \end{array} \right.$$

en faisant

$$\begin{aligned} A_{(\sigma)}^{(\mu)} &= F^{(1)} a (A_{0, \sigma})^{(\mu-1)} \\ &+ F^{(2)} a \left\{ (A_{1, \sigma})^{(\mu-1)} - (\sigma-1) (A_{0, \sigma})^{(\mu-2)} \right\} \\ &+ F^{(3)} a \left\{ (A_{2, \sigma})^{(\mu-1)} - (\sigma-2) (A_{1, \sigma})^{(\mu-2)} + \frac{(\sigma-2)^2}{1!1!} (A_{0, \sigma})^{(\mu-3)} \right\} \\ &+ F^{(4)} a \left\{ (A_{3, \sigma})^{(\mu-1)} - (\sigma-3) (A_{2, \sigma})^{(\mu-2)} + \frac{(\sigma-3)^2}{1!1!} (A_{1, \sigma})^{(\mu-3)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\sigma-3)^2}{1!1!} (A_{0, \sigma})^{(\mu-4)} \right\} \\ &\dots \\ &+ F^{(\sigma)} a \left\{ (A_{\sigma-1, \sigma})^{(\mu-1)} - (A_{\sigma-2, \sigma})^{(\mu-2)} + (A_{\sigma-3, \sigma})^{(\mu-3)} \right. \\ &\quad \left. \dots (-1)^{\sigma-1} (A_{0, \sigma})^{(\mu-\sigma)} \right\} \end{aligned}$$

Voyons maintenant ce que devient

$$\frac{d^{\sigma+\mu} [S_{\sigma+1} - (N_{\sigma+\mu} (\varphi x)^{\sigma+\mu} + \dots)]}{dx^{\sigma+\mu}},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d^{\sigma+\mu} [N_{\sigma+1} (\varphi x)^{\sigma+1} + N_{\sigma+2} (\varphi x)^{\sigma+2} + N_{\sigma+3} (\varphi x)^{\sigma+3} \dots + N_{\sigma+\mu-1} (\varphi x)^{\sigma+\mu-1}]}{dx^{\sigma+\mu}}$$

pour $x = a$.

Afin de pouvoir développer les calculs, prenons

$$(24) \quad \varphi x = \frac{x-a}{n+x},$$

n étant une constante arbitraire. Nous aurons généralement

$$\begin{aligned} d^{\sigma+\mu} \left(\frac{x-a}{n+x} \right)^{\sigma+\nu} \cdot \frac{1}{dx^{\sigma+\mu}} &= (-1)^{\mu-\nu} \cdot \frac{1^{\sigma+\mu+1} (\sigma+\nu)^{\mu-\nu+1}}{1^{\mu-\nu+1} (n+a)^{\sigma+\mu}} \\ x &= a. \end{aligned}$$

Au moyen de cette formule, il est facile de voir que

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d^{\sigma+\mu} [S_{\sigma+\mu} - (N_{\sigma+\mu}(\varphi x)^{\sigma+\mu} + \dots)]}{dx^{\sigma+\mu}} = - \frac{1^{\sigma+\mu+1}}{(n+a)^{\sigma+\mu}} \cdot N_{(\sigma)}^{(\mu)}, \\ x=a, \end{cases}$$

en posant

$$\begin{aligned} \dot{N}_{(\sigma)^{(\mu)}} = & \frac{(\sigma + \mu - 1)}{1} \cdot \dot{N}_{\sigma + \mu - 1} - \frac{(\sigma + \mu - 2)^{2|1}}{1^{2|1}} \dot{N}_{\sigma + \mu - 2} \\ & + \frac{(\sigma + \mu - 3)^{3|1}}{1^{3|1}} \dot{N}_{\sigma + \mu - 3} \\ & - \dots (-1)^{\mu} \frac{(\sigma + 1)^{\mu - 1|1}}{1^{\mu - 1|1}} \dot{N}_{\sigma + 1}. \end{aligned}$$

Enfin

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\sigma+\mu}(\varphi x)^{\sigma+\mu}}{dx^{\sigma+\mu}} = \frac{1^{\sigma+\mu} | 1}{(n+a)^{\sigma+\mu}}, \\ x = a. \end{array} \right.$$

Remplaçant les valeurs obtenues (23), (25) et (26) dans (20), il vien-

$$(27) \left\{ \frac{d^{\sigma+\mu} \{ Fx - [Fa + \Sigma(\sigma)] - (S_{(\sigma+1)} - [N_{\sigma+\mu}(\varphi x)^{\sigma+\mu} + \dots]) \}}{dx^{\sigma+\mu}} \right. \\ \left. \frac{d^{\sigma+\mu}(\varphi x)^{\sigma+\mu}}{dx^{\sigma+\mu}} \right. \\ \left. x = a. \right. \\ \left. = \dot{N}_{\sigma+\mu} = (n+a)^{\sigma+\mu} \left[\frac{d^{\sigma+\mu} Fx}{1^{\sigma+\mu} | 1 dx^{\sigma+\mu}} + A_{(\sigma)}^{(\mu)} \right] + \dot{N}_{(\sigma)}^{(\mu)}, \right.$$

et, au moyen de cette formule, on calculera facilement les coefficients

$$\dot{N}_{\sigma+1}, \dot{N}_{\sigma+2}, \dot{N}_{\sigma+3}, \dots$$

de la série complémentaire $S_{(\varpi+1)}$.

Donc nous aurons pour intégrale de $F'x$,

$$Fx = Fa + \Sigma_{(a)} + S_{(a+1)}.$$

(14)

Pour donner un exemple de l'application de ces formules, cherchons la fonction Fx dont

$$F'x = \frac{1}{x}$$

est la différentielle, et calculons-la avec deux éléments y_1, y_2 , c'est-à-dire pour $\varpi = 2$.

La formule (15) deviendra

$$Fx = Fa + F^{(1)}a P_{(1)}(x-a) + F^{(2)}a P_{(2)}(x-a)^2 = Fa + \Sigma_{(2)},$$

c'est-à-dire, en remplaçant les valeurs de $P_{(1)}$ et $P_{(2)}$ (16),

$$(A.1) \quad Fx = Fa + F^{(1)}a \left[1 - (x-a)^2 \frac{A_2}{A_1} \right] (x-a) \\ + F^{(2)}a \left[1 - (x-a) \frac{A_1}{A_2} + (x-a)^2 \frac{A_2}{A_1} \right] (x-a)^2.$$

Mais les valeurs de A_1 et A_2 en fonction de

$$F^{(1)}x = \frac{1}{x}, \quad F^{(2)}x = -\frac{1}{2x^2}, \quad F^{(3)}x = \frac{1}{3x^3}, \quad F^{(4)}x = -\frac{1}{4x^4},$$

sont, au moyen de la formule (10),

$$A_1 = -\frac{-\frac{1}{3x^3} \times \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{1}{4x^4}}{\left(\frac{1}{3x^3}\right)^2 - \frac{1}{2x^2} \times \frac{1}{4x^4}} = 6x,$$

et par la formule (9) en y remplaçant A_1 par sa valeur $6x$,

$$A_2 \frac{1}{3x^3} - 6x \times \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = 0, \\ A_2 = 6x^2.$$

Remplaçant les valeurs de A_1 et A_2 et celles de

$$F^{(1)}a = \frac{1}{a}, \quad F^{(2)}a = -\frac{1}{2a^2}$$

dans (A.1), elle deviendra

$$Fx = Fa + \frac{1}{a} \left[1 - (x-a)^2 \frac{1}{6x} \right] (x-a) \\ - \frac{1}{2a^2} \left[1 - (x-a) \frac{1}{x} + (x-a)^2 \frac{1}{6x^2} \right] (x-a)^2,$$

ou, en réduisant,

$$(A.2) \quad Fx = Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{12a^2x^2} [8ax - (x^2 + a^2)].$$

Quant à la série complémentaire, nous calculerons ses coefficients au moyen de la formule (27), qui devient, pour $\varpi = 2$,

$$(A.3) \quad \dot{N}_{(2+\mu)} = (n+a)^{2+\mu} \left\{ \frac{d^{2+\mu} Fx}{1^{2+\mu}|1| dx^{2+\mu}} + A_{(2)}^{(\mu)} \right\} + \dot{N}_{(2)}^{(\mu)}.$$

Or

$$(A.4) \quad \frac{d^{2+\mu} Fx}{1^{2+\mu}|1| dx^{2+\mu}} = \frac{(-1)^{\mu+1}}{(\mu+2)a^{2+\mu}},$$

$$x = a.$$

$$A_{(2)}^{(\mu)} = F^{(1)}a \frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1}|1|} \left(\frac{A_0}{A_2} \right) \frac{1}{dx^{\mu-1}}$$

$$x = a$$

$$+ F^{(2)}a \left\{ \frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1}|1|} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \frac{1}{dx^{\mu-1}} - \frac{d^{\mu-2}}{1^{\mu-2}|1|} \left(\frac{A_0}{A_1} \right) \frac{1}{dx^{\mu-2}} \right\}$$

$$x = a \qquad x = a.$$

Remplaçant $F^{(1)}a$, $F^{(2)}a$, A_1 , A_2 par leurs valeurs

$$A_{(2)}^{(\mu)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1}|1|} \left(\frac{1}{6x^2} \right) \frac{1}{dx^{\mu-1}}$$

$$x = a$$

$$+ \frac{1}{2a^2} \left[\frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1}|1|} \left(\frac{1}{x} \right) \frac{1}{dx^{\mu-1}} - \frac{d^{\mu-2}}{1^{\mu-2}|1|} \left(\frac{1}{6x^2} \right) \frac{1}{dx^{\mu-2}} \right].$$

$$x = a \qquad x = a$$

Effectuant les différentiations indiquées, et faisant ensuite $x = a$, il vient

$$A_{(2)}^{(\mu)} = \frac{1}{a} \times (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\mu!}{6a^{\mu+1}}$$

$$- \frac{1}{2a^2} \left[(-1)^{\mu-1} \frac{1}{a^\mu} - (-1)^\mu \frac{\mu-1}{6a^\mu} \right],$$

donc

$$(A.5) \quad (A_{(2)}^{(\mu)}) = (-1)^{\mu-1} \frac{\mu-5}{12a^{2+\mu}}.$$

Quant à $\dot{N}_{(2)}^{(\mu)}$, nous aurons l'équation (25),

$$(A.6) \quad \dot{N}_{(2)}^{(\mu)} = (\mu + 1) \cdot \dot{N}_{\mu+1} - \frac{\mu^2 + 1}{1^2 + 1} \cdot \dot{N}_{\mu} + \frac{(\mu - 1)^2 + 1}{1^2 + 1} \cdot \dot{N}_{\mu-1} - \dots$$

$$(-1)^{\mu} \cdot \frac{3^{\mu-1} + 1}{1^{\mu-1} + 1} \cdot \dot{N}_3.$$

Remplaçant (A.4), (A.5) et (A.6) dans (A.3), et prenant la constante arbitraire n égale à a , il vient

$$N_{2+\mu} = (-1)^{\mu+1} \frac{2^{\mu}}{3} \cdot \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{\mu+2} + (\mu+1) \dot{N}_{\mu+1} - \frac{\mu^2 + 1}{1^2 + 1} \dot{N}_{\mu}$$

$$+ \frac{(\mu-1)^2 + 1}{1^2 + 1} \dot{N}_{\mu-1} - \dots (-1)^{\mu} \cdot \frac{3^{\mu-1} + 1}{1^{\mu-1} + 1} \cdot \dot{N}_3.$$

Ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} \dot{N}_3 &= 0, & \dot{N}_4 &= 0, & \dot{N}_5 &= \frac{2^4}{3 \cdot 5}, \\ \dot{N}_6 &= 0, & \dot{N}_7 &= \frac{2^4}{3} \times \frac{3}{7}, & \dot{N}_8 &= 0, \\ \dot{N}_9 &= \frac{2^4}{3} \times \frac{6}{9}, & \dot{N}_{10} &= 0, & \dot{N}_{11} &= \frac{2^4}{3} \times \frac{10}{11}, \dots \end{aligned}$$

Donc la série complémentaire (18) deviendra

$$S_{(2)} = \frac{2^4}{3} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^5 + \frac{3}{7} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{6}{9} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \dots \right]$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} Fx &= Fa + S_{(2)} + S_{(3)}, \\ Fx &= Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{12a^2x^3} [8ax - (x^2 + a^2)] \\ &+ \frac{2^4}{3} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^5 + \frac{3}{7} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{6}{9} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \dots \right]. \end{aligned}$$



